Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zápočtová písemná práce z předmětu 01CAS

úterý 13. května 2025, 12:00 — 13:30

1 (12 bodů)
Nechť je v BČS pravděpodobnost intervalových frekvencí popsána formulí

$$\mathscr{P}[N_L = k] = \frac{(2L)^{2k}\mathrm{e}^{-2L}}{(2k)!}\left(1 + \frac{2L}{2k+1}\right).$$

Určete hustotu pravděpodobnosti pro druhou multirozteč, tj. pro $\mathcal{X}_2$.

2 (12 bodů)
Nechť je dán částicový systém, jehož liché rozteče jsou popsány hustotou pravděpodobnosti $f(x) \in \mathscr{B}$ a sudé (včetně nulté) hustotou pravděpodobnosti $h(x) \in \mathscr{B}$. Nechť dále $H(s) = \mathfrak{L}[h(x)]$ a $F(s) = \mathfrak{L}[f(x)]$. Odvoďte obecný vztah mezi Laplaceovým obrazem shlukové funkce systému a funkcemi $H(s)$ a $F(s)$. Ukažte, že se za podmínky $f(x) = g(x)$ váš výsledek redukuje na známý vztah.

3 (10 bodů)
Odvoďte vztah mezi momentovými kódy balancované hustoty $f(x) \in \mathscr{B}$ a k ní příslušné chvostové distribuční funkce $h(x) = \Theta(x)\int_x^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y$. Užijte k tomu vztah mezi laplaceovskými obrazy obou funkcí.

4 (12 bodů)
Pro hustotu pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} K^{-1}_{\alpha+1}\left(2\sqrt{\beta\lambda}\right)\Theta(x)\,x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{x}}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

sestavte škálovací rovnici zajišťující jednotkový první moment. Užijte vztahů pro Macdonaldovy funkce. Poté dokažte, že rozptyl příslušný k této škálované hustotě má velice jednoduchou podobu.

5 (4 body)
Definujte pojem statistické kompresibility a krátce naznačte, jakou metodou se odvozuje její závislost na generátoru BČS. Jde jen o krátké slovní naznačení postupu. Žádné odvozování se neočekává.

Vztahy mezi Macdonaldovými funkcemi:

$$x^a K_a(x) = 2^{a-1}\int_0^{+\infty} y^{a-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}}\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y, \quad (x > 0)$$

$$K_a(x) = K_{-a}(x)$$

$$K_{a-1}(x) - K_{a+1}(x) = -\frac{2a}{x}K_a(x)$$

$$K'_a(x) = -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x}K_a(x)$$

$$K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x) = -2K'_a(x)$$

$$K'_a(x) = -K_{a+1}(x) + \frac{a}{x}K_a(x)$$

Pro hustotu pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} K^{-1}_{\alpha+1}\left(2\sqrt{\beta\lambda}\right)\Theta(x)\, x^{\alpha}\mathsf{e}^{-\frac{\beta}{x}}\,\mathsf{e}^{-\lambda x}$$

sestavte škálovací rovnici zajišťující jednotkový první moment. Užijte vztahů pro Macdonaldovy funkce. Poté dokažte, že rozptyl příslušný k této škálované hustotě má velice jednoduchou podobu.

Vztahy mezi Macdonaldovými funkcemi:

$$\begin{aligned}
x^a K_a(x) = 2^{a-1}\int_0^{+\infty} y^{a-1}\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4y}}\,\mathsf{e}^{-y}\,\mathsf{d}y, \quad (x>0) \\
K_a(x) = K_{-a}(x) \\
K_{a-1}(x) - K_{a+1}(x) = -\frac{2a}{x}K_a(x) \\
K_a'(x) = -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x}K_a(x) \\
K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x) = -2K_a'(x) \\
K_a'(x) = -K_{a+1}(x) + \frac{a}{x}K_a(x)
\end{aligned}$$