Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta A

úterý 19. listopadu 2019, 13:20–15:20

Ve vyznačené kolonce vyplňte své jméno a příjmení a pod ní uveďte jméno vašeho cvičícího/cvičící. Na lavici připravte index, popř. jiný doklad umožňující vaši identifikaci.

1 (2 body)
Doplňte následující implikaci a své tvrzení dokažte.

$$z(x), w(x) \in \Omega_q \quad \Rightarrow \quad 2w(x) - z(x) \in$$

2 (5 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{(2n+1)!!} x^n.$$

3 (7 bodů)
Ve vektorovém prostoru $[1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7]_\lambda$ nalezněte polynom, který nejlépe aproximuje hodnotu integrálu

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{y^3+1}}\, \mathrm{d}y.$$

4 (9 bodů)
Jedním z řešení diferenciální rovnice

$$x^2 y'' + (4x^2 - 7x)y' + (4x^2 - 14x + 15)y = 24x\mathrm{e}^{-2x}$$

je funkce $x\mathrm{e}^{-2x}(3 + x^2)$. Jak vypadá celý prostor řešení této rovnice?

5 (9 bodů)
Lze nebo nelze Weierstrassovým kritériem rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n}(5-x)^{2n}}{n \cdot 25^n}$$

na intervalu $I = (0, 5)$?

6 (8 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu

$$(2x-1)y'' + (4x^2 - 4x - 1)y' = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 3.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta B

úterý 19. listopadu 2019, 13:20–15:20

Ve vyznačené kolonce vyplňte své jméno a příjmení a pod ní uveďte jméno vašeho cvičícího/cvičící. Na lavici připravte index, popř. jiný doklad umožňující vaši identifikaci.

1 (2 body)
Doplňte následující implikaci a své tvrzení dokažte.

$$z(x), w(x) \in \Omega_q \quad \Rightarrow \quad w(x) - z(x) \in$$

2 (8 bodů)
Lze nebo nelze Weierstrassovým kritériem rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x^2-1)^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 9^n}$$

na intervalu $I = (-1, 2)$?

3 (7 bodů)
Ve vektorovém prostoru $[1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7]_\lambda$ nalezněte polynom, který nejlépe aproximuje hodnotu integrálu

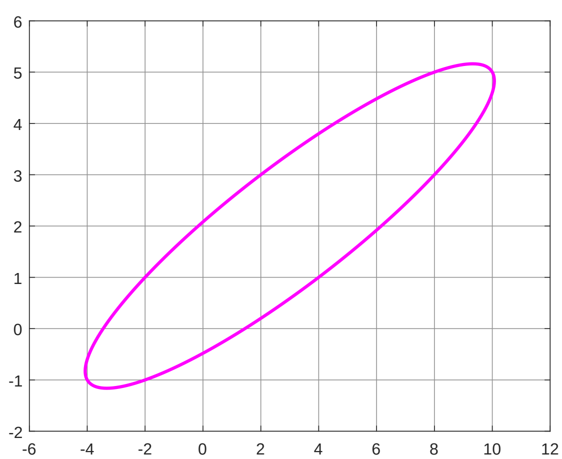
$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{y^2+1}}\,\mathrm{d}y.$$

4 (6 bodů)

Formálním řešením diferenciální rovnice

$$y' \cdot (5y - 2x - 4) = 2y - x - 1$$

je křivka z obrázku. Nalezněte její rovnici.



5 (9 bodů)
Rovnici

$$x^2(1-2x)y'' - x(4 - 11x + 4x^3)y' + 2(3 - 9x + x^2 + 5x^3 - 2x^4)y = 2x^4(1 + x - 2x^2)$$

řeší funkce $x^2(1 + \mathrm{e}^{-x})$ a $x^2(1 + 2\mathrm{e}^{-x})$. Nalezněte všechna její řešení.

6 (8 bodů)
Rozhodněte o typu konvergence posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ na množině $I = (0, \infty)$, kde

$$f_n(x) = \frac{12x^2n^2 - 2xn + 1}{4x^2n^2 - 2xn + 1}.$$

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta N

středa 11. prosince 2019, 13:20–15:20

1 (9 bodů)
Nalezněte funkci $y(x)$, jež řeší diferenciální rovnici

$$(4x-2)y'' + 2y' - 6(y')^3 = 0$$

a vyhovuje podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$.

2 (8 bodů)
Nalezněte obor konvergence $\mathcal{O}$ mocninné řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{x^n}{n}$$

a rozhodněte, zda zadaná řada konverguje stejnoměrně na $\mathcal{O}$. Řádně zdůvodněte!

3 (6 bodů)
Nechť $a > 0$ je zvoleno pevně. Přímou metodu (tj. dosazením do definičního vztahu a bez použití rozvojů elementárních funkcí) sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x) = \ln(1 + ax),$$

nalezněte její obor konvergence a prokažte, že součtem získané řady je skutečně funkce $g(x)$.

4 (8 bodů)
Rozhodněte, zda platí rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{100} \frac{\sqrt{n^3}\,\ln(n)\,x^4}{1+n^4x^8}\,\mathrm{d}x = \int_0^{100} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}\,\ln(n)\,x^4}{1+n^4x^8}\,\mathrm{d}x.$$

Detailně zdůvodněte!

5 (3 body)
Sestavte diferenciální rovnici, pro níž $\Omega_q = [1, x^2, x^2+4]_\lambda + 8x$.

6 (6 bodů)
Nalezněte obor konvergence a součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta A

pondělí 6. ledna 2020, 13:00–15:00

1 (10 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu

$$y''' + \frac{3}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = \frac{2}{x}$$

s podmínkami $y(1) = \frac{11}{2}$, $y'(1) = -1$, $y''(1) = 12$.

2 (6 bodů)
Nalezněte všechna $a \in \mathbf{R}$ tak, aby funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = a\sqrt{x}$ měly v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle := \int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

vzdálenost rovnou čtyřem.

3 (6 bodů)
V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ je dána množina A (obrys čtverce bez vnitřku – viz obrázek na zadní straně zadání). Okolí vybraného bodu (o poloměru ε) má tvar úsečky z obrázku o délce 2ε. Do druhého obrázku vyznačte všechny vnitřní body množiny A a slovně vysvětlete, o co se opírá vaše úvaha. V rámci řešení také vyslovte definici vnitřního bodu!

4 (9 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 6x^2\mathrm{e}^{2x}.$$

Užijte faktu, že vektorový prostor

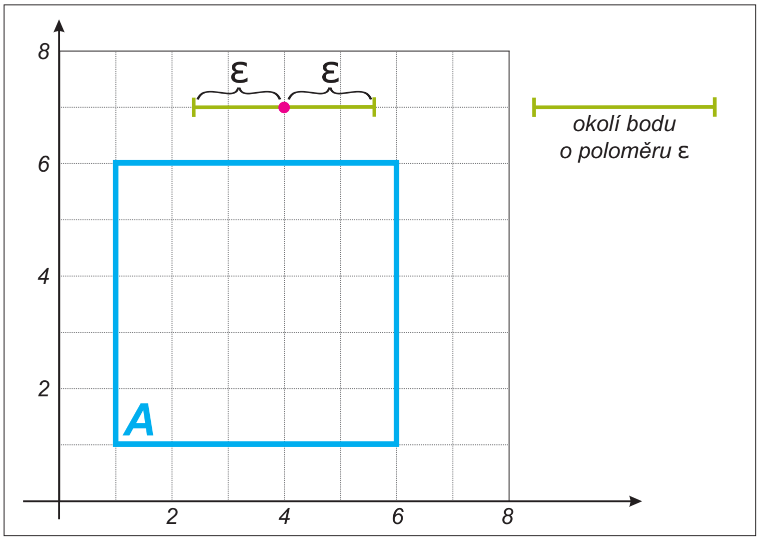
$$\mathcal{V} = \left\{y(x) \in C^3(\mathbf{R}):\ xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 0 \wedge y''' - 4y'' + 4y' = 0\right\}$$

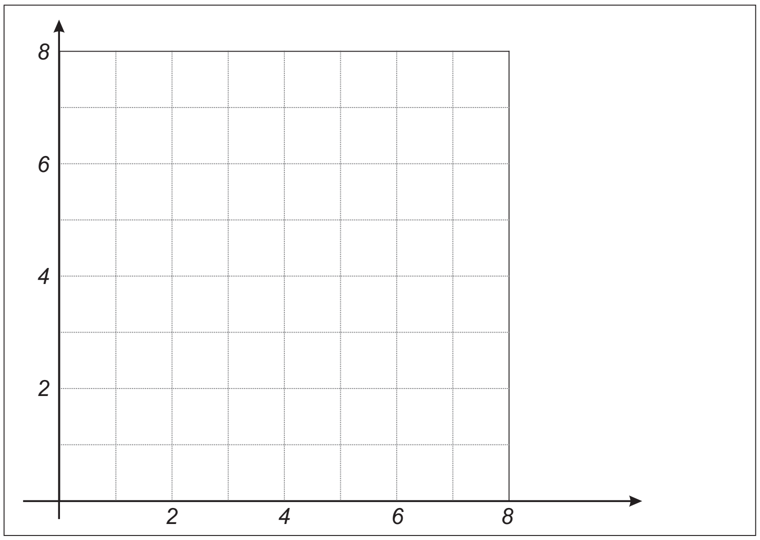
má dimenzi jedna. Jakého tvaru je Ω_0 pro výše uvedenou rovnici třetího řádu?

5 (9 bodů)
Pro kvadratickou plochu

$$4x + x^2 + 4y + 2xy + 2y^2 - 12z - 6xz - 4yz + 10z^2 = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Stanovte transformaci, která zadanou plochu normalizuje, a převeďte ji do maticového tvaru. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.


8
6
4
2
2
4
6
8
ε
ε
A
okolí bodu
o poloměru ε


8
6
4
2
2
4
6
8

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta B

pondělí 6. ledna 2020, 13:00–15:00

1 (6 bodů)
Nalezněte všechna $a \in \mathbf{R}$ tak, aby funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = ax^2$ měly v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle := \int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

vzdálenost rovnou $4\sqrt{6}$.

2 (9 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$xy'' - (6x+1)y' + (9x+3)y = 24x^3\mathrm{e}^{3x}.$$

Užijte faktu, že vektorový prostor

$$\mathcal{V} = \left\{y(x) \in C^3(\mathbf{R}) :\ xy'' - (6x+1)y' + (9x+3)y = 0 \ \wedge\ y''' - 6y'' + 9y' = 0\right\}$$

má dimenzi jedna. Jakého tvaru je Ω_0 pro výše uvedenou rovnici třetího řádu?

3 (6 bodů)
V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ je dána množina A (obrys čtverce bez vnitřku – viz obrázek na zadní straně zadání). Okolí vybraného bodu (o poloměru ε) má tvar úsečky z obrázku o délce 2ε. Do druhého obrázku vyznačte všechny hraniční body množiny A a slovně vysvětlete, o co se opírá vaše úvaha. . V rámci řešení také vyslovte definici hraničního bodu!

4 (9 bodů)
Pro kvadratickou plochu

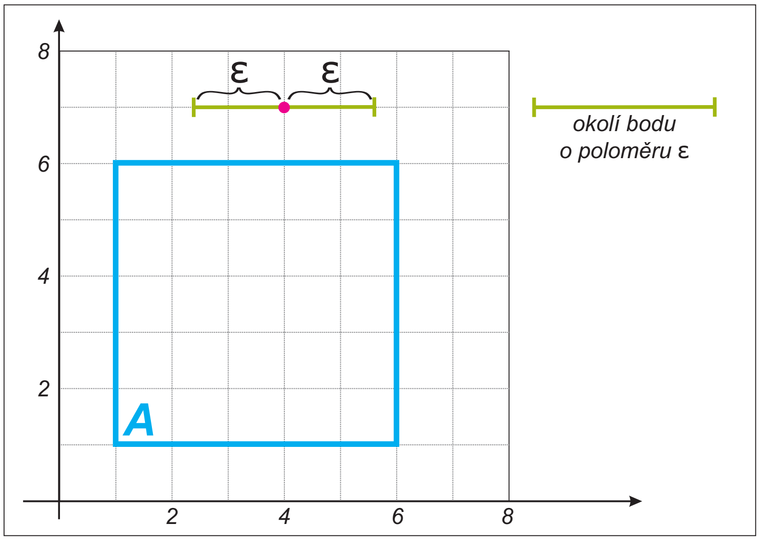
$$4x + x^2 + 12y + 6xy + 8y^2 + 8z + 4xz + 8yz = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Stanovte transformaci, která zadanou plochu normalizuje, a převeďte ji do maticového tvaru. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

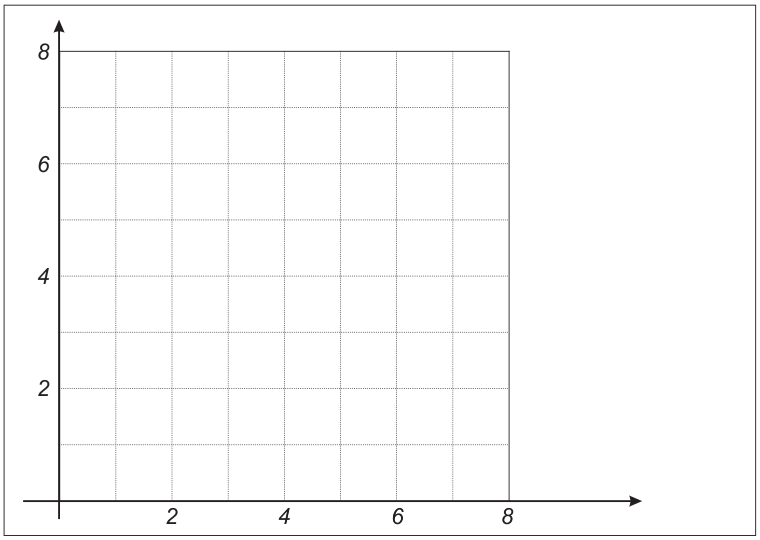
5 (10 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu

$$y''' + \frac{1}{x}y'' - \frac{5}{x^2}y' + \frac{8}{x^3}y = 6x$$

s podmínkami $y(1) = -1$, $y'(1) = \frac{5}{2}$, $y''(1) = -\frac{7}{2}$.



ε
ε
okolí bodu
o poloměru ε
A
8
6
4
2
2
4
6
8



8
6
4
2
2
4
6
8