Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5

CELKEM

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3 – verze A

24/10/2022, 10:00 - 11:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

1 (8 bodů)
Vysvětlete, zda lze aplikací Weierstrassova kritéria rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3n+1)!!!}{(n+1)!} \left(x^2 e^{1-3x^2}\right)^n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+1)!!!}{(n+1)!} \left(x^2 e^{1-3x^2}\right)^n$$

na množině všech reálných čísel.

2 (7 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x(x-2)y' + y = -3x^2 \sqrt{2-x}$$

za podmínky $y(1) = 7$.

3 (7 bodů)
Určete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} (x-1)^n.$$

4 (9 bodů)
Dirichletovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x}{x^2+n^2}$$

na množině $\langle 0, \infty)$.

5 (9 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(x + \frac{x^2 n^2}{x^2 n^2 + xn + 1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $(0, \infty)$. Řádně komentujte!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3 – verze B

9/11/2022, 10:00 - 11:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

1 (8 bodů)
Zkonstruujte Taylorovu řadu funkce

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

v bodě $x_0 = 2$ a stanovte její obor konvergence. Výsledek upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály.

2 (9 bodů)
Rozhodněte, zda platí rovnost

$$\int_0^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(2n+1)!!} \frac{x^n(4-x)^n}{2^n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^4 \frac{(n-1)!}{(2n+1)!!} \frac{x^n(4-x)^n}{2^n}\,\mathrm{d}x.$$

3 (7 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$xy' - 2(x+1)y = 18x^4 \mathrm{e}^{5x}.$$

4 (9 bodů)
Rozhodněte, zda řada funkcí

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{(n^2x^2+1)\,\ln^{3/2}(n)}$$

konverguje na množině $I = (-\infty, \infty)$ stejnoměrně.

5 (7 bodů)
Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x) = \mathrm{tg}(3x) + \mathrm{tg}(x),$$

její obor konvergence.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5

CELKEM

Zápočtová práce č. 2 z předmětu 01ANB3 – verze A

28/11/2022, 10:00 - 11:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

1 (8 bodů)
Nalezněte součtovou funkci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

a její definiční obor. Návod: Řadu čtyřikrát derivujte a výsledek porovnejte s původní řadou. Získáte tak diferenciální rovnici, k níž lze snadno najít příslušnou Cauchyovu úlohu. Tu poté vyřešte.

2 (8 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 36\mathrm{e}^{-x}.$$

Jakého tvaru jsou pro tuto rovnici prostory Ω_0 a Ω_q?

3 (9 bodů)
Řešte Cauchyovu úlohu

$$x^3y''' + 5x^2y'' - xy' - 8y = 0, \quad (y(1), y'(1), y''(1)) = (-1, 11, -19).$$

4 (8 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x^3y''' + (4x^3 - 6x^2)y'' + (18x - 16x^2 + 4x^3)y' + (-24 + 24x - 8x^2)y = 0.$$

Užijte faktu, že ve fundamentálním systému této rovnice leží funkce $y(x) = x^2$.

5 (7 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x^2y' + 5y^2 - 2xy = 0$$

vyhovující podmínce $y(5) = \frac{1}{2}$.