Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta A

1. června 2020, 13:00–15:00

1 (8 bodů)
Existují tři funkce $u = u(x, y, z)$ implicitně zadané rovnicí

$$u^3 + u^2 - ux^2 + xz - y^3 + 3 = 0.$$

Která z nich klesá v bodě $(a_x, a_y, a_z) = (2, -1, -4)$ nejstrměji ve směru $(1, 1, 1)$?

2 (3 body)
Nechť je dáno zobrazení $(x, y) = \vec{H}(\varrho, \varphi) = (\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi))$, jehož definičním oborem je množina z levého obrázku (na druhé straně zadání). Do pravého obrázku vykreslete příslušný obor hodnot.

3 (9 bodů)
Vyřešte následující parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Užijte k tomu převodní vztahy $a = ye^{3x}$ a $b = ye^{-x}$.

4 (8 bodů)
Nechť je funkce $z(x, y)$ zadána implicitně rovnicí

$$z^3 - 2xz^2 + 6y = 30.$$

Nalezněte její totální diferenciál v bodě $(x_0, y_0) = (3, 5)$ a na jeho základě sestavte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z(x, y)$ v příslušném bodě. Diskutujte všechna přípustná řešení této úlohy!

5 (6 bodů)
Pro nespojitou funkci

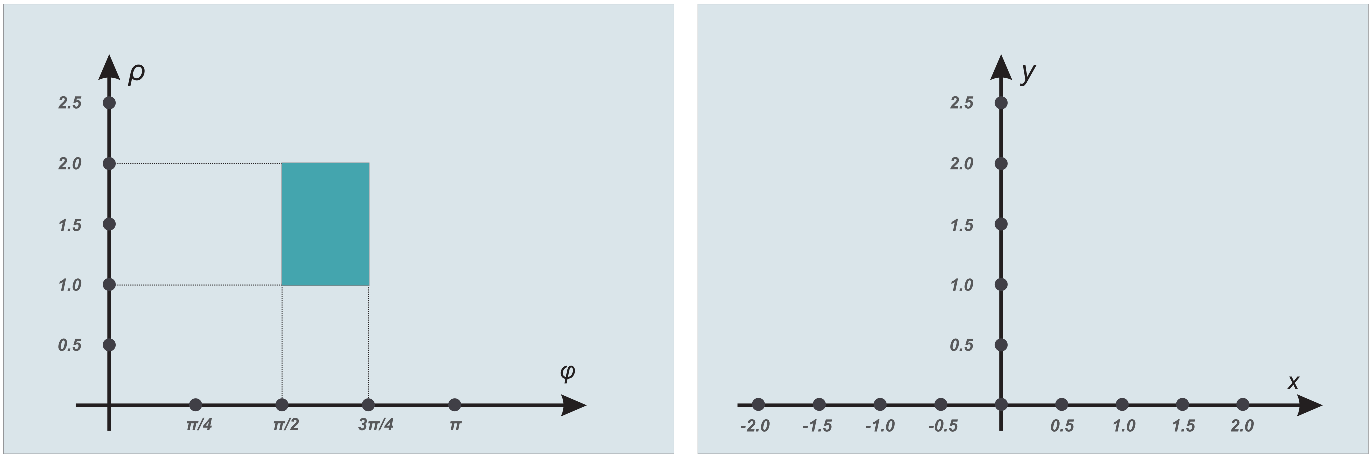
$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{|x|\sqrt{9x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{16}{5} & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

existují pouze dvě přímky, vzhledem k nimž je tato funkce spojitá v počátku souřadné soustavy. Nalezněte alespoň jednu z nich a poté vypočítejte hodnotu směrové derivace ve směru této přímky (ve zmíněném bodě).

6 (6 bodů)
Nalezněte lokální extrémy funkce

$$g(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 10x + 18y - 10z$$

a stanovte jejich typ.



Obrázek k příkladu č. 2

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

10. června 2020, 9:30–11:30

1 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = 2x(y+z) + yz$$

za podmínek

$$x,y,z > 0 \;\wedge\; 12x^2 + 3y^2 + 2z = 16.$$

2 (6 bodů)
Zodpovězte následující dotazy a vysvětlete, o co se vaše odpověď opírá.

- Do soustavy $\{\emptyset; \{\blacklozenge\}; \{\bigstar\}; \{\blacksquare, \bigstar, \bullet, \blacklozenge\}\}$ doplňte jedinou množinu tak, aby tato soustava byla polookruhem. Poté vysvětlete, proč takto vzniklá soustava není okruhem.
- Křivka popsaná parametrizací $(\sqrt{3}\cos(\tau);\ \tau;\ \sqrt{3}\sin(\tau))$, kde $\tau \in \langle 0, ?\rangle$, má délku $13\pi/3$. Jaký je její koncový bod?
- Je Heavisideova funkce finitní funkcí? Uvažujte klasickou míru.

3 (8 bodů)
Dvojrozměrná Lebesgueova míra je zadána prostřednictvím dvou vytvořujících funkcí

$$\varphi(x) = x^3 \quad \& \quad \psi(y) = y^2\Theta(y),$$

kde $\Theta(y)$ je Heavisideova funkce. Vypočítejte míru množiny z obrázku na druhé straně zadání.

4 (8 bodů)
Vypočítejte objem (klasickou třídimenzionální míru) tělesa popsaného nerovnostmi

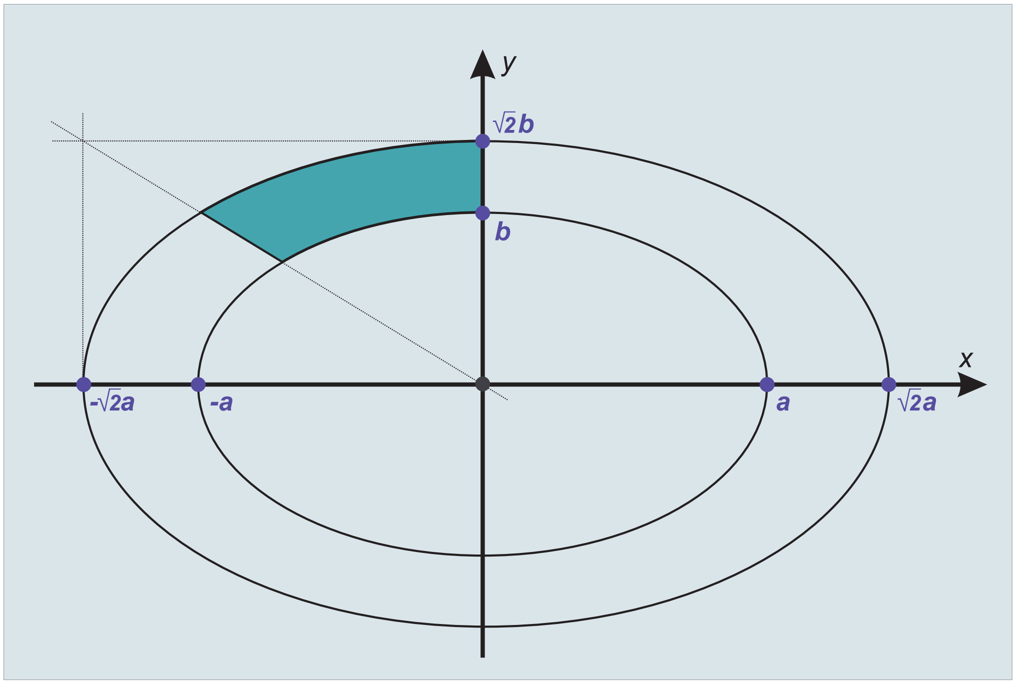
$$x,y,z > 0 \;\wedge\; \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} < \frac{x}{a} - \frac{y}{b}.$$

Čísla a, b, c považujte za pevně zvolené parametry.

5 (8 bodů)
Prověřte splnění předpokladů pro možnost derivování integrálu

$$\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$$

podle β. Neomezte se pouze na formální diskusi předpokladů. Splnění všech předpokladů explicitně dokažte příslušným výpočtem.



Obrázek k příkladu č. 3