

Jméno a příjmení

1

2

3

4

5

6

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta A

12. dubna 2021, 9:20–11:20

1 (7 bodů)

Na kuželosečce

$$3 - 2x + 2x^2 - 10y - 4xy + 10y^2 = 0$$

nalezněte body, v nichž je tečna rovnoběžná s osou prvního a třetího kvadrantu.

2 (10 bodů)

Řešte parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3x \frac{\partial u}{\partial x} + 3y \frac{\partial u}{\partial y} + 8x^3 y^5 = 0.$$

Užijte k tomu transformačních vztahů druhého druhu ve tvaru

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

3 (5 bodů)

Nechť je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4y}{\sqrt{4(x-3)^4 + y^2 + y(x-3)^2}} & \dots (x, y) \neq (3, 0), \\ 3 & \dots (x, y) = (3, 0), \end{cases}$$

která není na \mathbf{R}^2 spojitá. Nalezněte alespoň jednu parabolu, vzhledem k níž je tato funkce spojitá v bodě (3, 0).

4 (10 bodů)

Pro funkci $z = z(x, y)$ zadanou implicitně rovnicemi

$$z^3 - 2z^2y - 4xyz + 8x^2y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 16u = 22$$

vypočítejte hodnotu $\text{grad}(z)$ v bodě $\vec{a} = (1, 1)$ a poté $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 1)$.

5 (8 bodů)

Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x, y) = (1 + x^2 + y)^{\frac{1}{3}}.$$

Výsledek upravte do tvaru dvojnásobné sumy s vícenásobnými faktoriály. Stanovte, kde uvedená rovnost platí. Výpočet oboru konvergence korektně proveďte.

Nápověda pro případné zájemce: Prvním kvadrantem rozumíme množinu $Q_I := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$. Třetím kvadrantem rozumíme množinu $Q_{III} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 0 \wedge y < 0\}$.

Jméno a příjmení

1

2

3

4

5

6

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta N

26. dubna 2021, 9:20–11:20

1 (6 bodů)

Nalezněte množinu M , vzhledem k níž je funkce

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{12y^6}{(x-1)^2+y^4} \cdot \frac{1}{x-1} & \dots (x, y) \neq (1, 0); \\ \frac{2}{5} & \dots (x, y) = (1, 0); \end{cases}$$

spojitá v bodě nespojitosti.

2 (10 bodů)

Pro funkci $z = z(x, y)$ zadanou (společně s funkcí $u = u(x, y)$) implicitně rovnicemi

$$u^3 - 2u^2y - 4xyu + 8x^2y^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + u^2 + 16z = 22,$$

vypočítejte směrovou derivaci

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(1, 1)$$

ve směru $\vec{s} = (4, 3)$.

3 (7 bodů)

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Aplikací teorie implicitních funkcí nalezněte rovnici tečné roviny k ploše

$$\frac{x^2y^2}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1 \quad (1)$$

v jejím bodě (x_0, y_0, z_0) . Výsledek upravte do elegantního tvaru, který využívá skutečnosti, že bod (x_0, y_0, z_0) splňuje rovnost (1).

4 (9 bodů)

Řešte parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Užijte k tomu transformačních vztahů druhého druhu ve tvaru $a = e^{-x}y^2$ a $b = e^{-x}y$.

5 (8 bodů)

Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+3x+y}}.$$

Výsledek upravte do tvaru dvojnásobné sumy s vícenásobnými faktoriály. Stanovte, kde uvedená rovnost platí. Výpočet oboru konvergence korektně proveďte.

Jméno a příjmení

1

2

3

4

5

6

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

3. května 2021, 9:20–11:20

1 (9 bodů)

Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^4 + \frac{z^2}{c^2} \leq \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} \wedge x, y, z \geq 0 \right\}.$$

2 (9 bodů)

Jakých extrémálních hodnot nabývá funkce

$$g(x, y, z) = x^2 - 4xy + 6x + 5y^2 - 2yz - 10y + 2z^2 - 4z$$

v rovině $y - z + 1 = 0$? Úlohu řešte výhradně metodou Lagrangeových multiplikátorů.

3 (10 bodů)

Vyšetřete lokální extrémy funkce $z(x, y, u)$, jež je zadána rovnicí

$$z^3 + 3uz^2 + 4x^2 + 24xy - u^3 + 68y + 2y^2 = 37.$$

Omezte se na případ, kdy $z > 0$ a současně $u > 0$.

4 (4 body)

Vypočítejte moment setrvačnosti $J = \int_V (x^2 + y^2) d(x, y, z)$ pro polokulovou vrstvu

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \wedge z \geq 0 \right\}.$$

5 (9 bodů)

Určete souřadnice těžiště obrazce

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leq 2 \frac{y^3}{b^3} \right\}.$$