Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MCS – varianta A

pondělí 25. listopadu 2019, 15:30–16:30

1 (4 body)
U dvou balancovaných hustot $f(x)$ a $g(x)$ je znám jejich momentový kód, a sice $(2^{k+2})_{k=0}^{\infty}$ a $(5^{k+1})_{k=0}^{\infty}$. Čemu se rovná

$$\int_{\mathbf{R}} x(f \star g)(x)\,\mathrm{d}x\,?$$

Výsledek podpořte komentovaným výpočtem.

2 (8 bodů)
Nechť $\beta > 0$. Aplikací Laplaceovy transformace vypočítejte

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\beta x)\cos^2(\beta x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3 (8 bodů)
Nalezněte funkce $f(x), g(x) \in \mathscr{B} \cap \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$, pro které platí:

$$f(x) \star \Theta(x)\mathrm{e}^{-3x} \star g'(x) = \frac{\Theta(x)}{60} x^4 \mathrm{e}^{-3x}(5 - 3x)$$

$$g'(x) - 2f(x) + 3g(x) = 0.$$

Uvažte, jak lze užít faktu, že hledané funkce jsou spojitě diferencovatelné na $\mathbf{R}$?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MCS – varianta B

pondělí 25. listopadu 2019, 15:30–16:30

1 (5 bodů)
Pro balancovanou hustotu $g(x)$ je znám její momentový kód $\vec{\mu} = (\mu_k)_{k=0}^{\infty}$. Ukažte, že pro jistá α je funkce $g(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \in \mathscr{B}$ a pomocí $\vec{\mu}$ odvoďte kompletní momentový kód hustoty $g(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$.

2 (8 bodů)
Aplikací Laplaceovy transformace rešte (na intervalu $(0, +\infty)$) integrodiferenciální rovnici

$$y' + 4y + 4\int_0^x y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 4x^2 + 8x + 7$$

společně s podmínkou $y(0_+) = 0$.

3 (7 bodů)
Nalezněte funkce $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$, pro které platí:

$$f(x) \star \Theta(x)\mathrm{e}^{-2x} \star g(x) = \frac{\Theta(x)}{120} x^6 \mathrm{e}^{-2x}$$

$$f(x) \star g(x) \star g(x) = \frac{\Theta(x)}{840} x^7 \mathrm{e}^{-2x}$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MCS – varianta A

úterý 17. prosince 2019, 11:30–13:20

1 (10 bodů)
Nechť je balancovaná hustota pravděpodobnosti $g(x)$ zadána svým momentovým kódem

$$\left(\frac{(k+1)!}{2^k}\right)_{k=0}^{\infty}.$$

Nechť mají náhodná veličina $\mathcal{X}$ rozdělení $g(x)$ a náhodná veličina $\mathcal{Y}$ rozdělení $h(x) = \frac{9}{4}g(x)\mathrm{e}^{-x}$. Nechť jsou $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ konvolučně sdružené. Čemu se rovná rozptyl veličiny $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$?

Může se hodit:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+a)\,x^n = \frac{a!}{(x-1)^{a+1}} \quad (a \in \mathbf{N}).$$

2 (14 bodů)
Dokažte vztah mezi trendovou a shlukovou funkcí v BČS. Obě funkce nejprve definujte, aby bylo zřejmé, na čem se bude zakládat vaše odvození. V rámci odvození také dokažte, že řada figurující v předpisu shlukové funkce konverguje STEJNOMĚRNĚ na každém $\langle 0, \mathrm{L}\rangle$.

3 (10 bodů)
Pro funkci

$$f(x) = A\Theta(x)x^2\mathrm{e}^{-\beta/x^2}\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

vypočítejte $f(x) \star f(x)$. Užijte aproximativního přístupu.

4 (8 bodů)
Dokažte platnost následujícího vztahu v $\mathscr{B}$:

$$\int_0^{\infty} g(x)H(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} G(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vysvětlete také smysl jednotlivých symbolů v tomto vztahu. Neopomeňte zdůvodnit konvergenci obou integrálů!

5 (10 bodů)
Řešte soustavu, víte-li, že platí:

$$(w \star w)(x) + x \cdot y(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin(x)$$

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

6 (8 bodů)
Určete předpis shlukové funkce pro BČS s generátorem $h(x) = A\Theta(x)x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}$. Nejprve ale vypočítejte, čemu se musejí rovnat konstanty A a λ.

Může se hodit:

$$\int_0^{\infty} x^n\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$