Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení písemky	Datum a čas testu
✍		27. května 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

❶ Rozhodněte, zda je množinová soustava $\mathscr{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbf{R}\}$ aditivní a zda je okruhem.

❷ Nechť jsou nulová funkce a funkce $g(x) = \Theta(x)\Theta(6-x)$ $\mu-$ekvivalentní? Čemu se rovná

$$\int_1^5 \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}\mu(x)$$

a proč?

❸ Následující výrok přepište do jednoduchého (a minimalistického) tvaru.

$$\lim_{c\to 0} \frac{g(1,3,0) - g(1+4c, 3-4c, 2c)}{c} = 8.$$

❹ Ukažte, jak lze elegantně (za pomoci Fubiniovy věty) vyčíslit hodnotu Gaussova integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \,\mathrm{d}x.$$

❺ Vyslovte definici křivkové parametrizace a vysvětlete, kdy řekneme, že je křivka $C \subset \mathbf{R}^r$ jednoduchá.

❻ Slovně (bez použití matematických symbolů) vysvětlete, co je smyslem Greenovy věty, tj. o čem pojednává a jaká je její nejčastější aplikace.

❼ Nechť je dána funkce $g(x) = \Theta(x-1)\cdot x^2$ a vytvořující funkce

$$\varphi(x) = \frac{12x|x|}{4+3x^2}$$

míry. Jakou míru má nosič funkce $g(x)$?

❽ Definujte pojem směrové derivace. Poté vysvětlete, za jakých podmínek lze při výpočtu směrové derivace užít známý vzorec.

❾ O posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^2$ je známo, že:

$$(\forall \delta > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n > n_0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \|\vec{x}_n - (3,-1)\| < \delta.$$

Čemu se pro $f(\vec{x}) = (x_1 x_2)^2$ rovná

$$\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n)\,?$$

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		2. června 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

❶ Vyslovte definici ostrého lokálního minima.

❷ Nalezněte alespoň jeden kritický generující bod pro implicitní funkci $z = z(x, y)$, která je zadána prostřednictvím rovnice

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

❸ Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3(y+2)^2 x^4}{(y+2)^4 + 5x^8} & \dots\ (x, y) \neq (0, -2), \\ \frac{4}{7} & \dots\ (x, y) = (0, -2), \end{cases}$$

je spojitá v bodě $(0, -2)$ vzhledem k jistým množinám

$$M_{\alpha\beta} = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : y = \alpha x^2 + \beta\right\}.$$

Najděte všechna taková $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

❹ Definujte pojem polookruhu a okruhu.

❺ Kdy řekneme, že je zobrazení $\vec{G}(x, y) : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ prosté? Podle vaší definice rozhodněte, je zda vektorová funkce

$$\vec{G}(x, y) = (x^4 + y^2, xy)$$

prostá.

❻ Vyslovte znění Lebesgueovy věty a aplikujte ji při vyčíslení limity

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \frac{n^2 x^3}{(8 + n^2 x^2)(1 + x^4)} \, \mathrm{d}x.$$

Výraz vypočítejte!

❼ Kdy řekneme, že je plocha $S \subset \mathbf{R}^3$ hladká regulární?

❽ Vyslovte definici totálního diferenciálu.

❾ Rozhodněte (a řádně zdůvodněte), zda $x^{-2} \in \mathscr{L}(\langle 1, 2\rangle)$. Předpokládejte klasickou míru.

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		8. června 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto$ **A**; $\langle 16, 17) \mapsto$ **B**; $\langle 15, 16) \mapsto$ **C**; $\langle 14, 15) \mapsto$ **D**; $\langle 12, 14) \mapsto$ **E**; $\langle 0, 12) \mapsto$ **F**;

❶ Krátkým symbolem vyjádřete smysl výrazu

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{a} + \tau(0,0,4)) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{a})}{\tau}.$$

❷ Vyslovte definici monotonie a aditivity množinové funkce.

❸ Zapište definici křivkové parametrizace a sestavte ji pro křivku

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \wedge z = \frac{c}{2}\right\}.$$

❹ Vyslovte větu o separabilitě Lebesgueova integrálu.

❺ Vyčíslete divergenci vektorové funkce

$$\vec{G}(x, y, z) = \left(x^3 + y^2 + z, 3x^2y + 5y^2z + 7z^2x, (xyz)^3\right).$$

❻ Vyslovte definici ostrého lokálního maxima.

❼ Hessova matice funkce $h(\vec{x}) \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ má ve stacionárním bodě $\vec{a}$ tvar

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pro která $\beta \in \mathbf{R}$ je bod $\vec{a}$ bodem sedlovým?

❽ Vyslovte definici křivkového integrálu druhého druhu. Neopomeňte udat všechny předpoklady.

❾ Nechť je dána funkce

$$h(x) = \begin{cases} x^4; & x \in \mathbf{Q} \\ x^2; & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Vypočítejte $\int_{-2}^{2} h(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$. Výpočet okomentujte, aby bylo zřejmé, o jaké úvahy se váš výpočet opírá.

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		14. června 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

❶ Hessova matice funkce $h(\vec{x}) \in C^\infty(\mathbf{R}^4)$ má ve stacionárním bodě $\vec{a}$ tvar

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & c & -3 \end{pmatrix}$$

Pro která $c \in \mathbf{R}$ je bod $\vec{a}$ bodem sedlovým?

❷ Definujte základní systém funkcí $\mathcal{Z}_\mu$. Jednotlivé pojmy vysvětlete.

❸ Vyslovte Fubiniovu větu pro Lebesgueův integrál z funkce $f(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbf{R}^{r+s} \mapsto \mathbf{R}$.

❹ Definujte pojem totálního diferenciálu. Dbejte na zřetelné odlišení vektorů a skalárů.

❺ Podle definice rozhodněte, zda je elipsa

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

hladkou regulární křivkou.

❻ Prověřte předpoklady věty o derivaci integrálu s parametrem pro případ integrálu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-4x^2} \cos(\alpha x)\, \mathrm{d}x.$$

❼ Vyslovte definici regularity zobrazení $\vec{g}(\vec{x}) = \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}^r$.

❽ Vyslovte Heineovu větu pro limitu funkce více proměnných.

❾ Zapište tvar Hessovy matice funkce $z = z(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (1, 2)$, v němž má tato funkce funkční hodnotu rovnou nule. Funkce $z = z(x, y)$ nechť je zadána implicitně rovnicí

$$y^2 + xz - z^3 = 4.$$

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
		21. června 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

❶ Nechť je zadána abstraktní Lebesgueova míra prostřednictvím vytvořující funkce

$$\varphi(x) = \Theta(x)\sqrt{36 + x^2}.$$

Jakou míru má nosič funkce $g(x) = \Theta(64 - x^2)$? Symbol $\Theta(x)$ reprezentuje Heavisideovu funkci.

❷ Vyslovte větu o spojitosti složené funkce $g(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$.

❸ Ukažte, jak je definována vnější míra vytvořená z míry $\mu_\sigma(X)$, která je zavedena na $\mathscr{S}_r$.

❹ Vyslovte precizní znění věty o postačující podmínkce pro lokální extrém funkce více proměnných.

❺ Prověřte předpoklady věty o derivaci integrálu s parametrem pro případ integrálu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-4x^2} \cos(\alpha x)\, \mathrm{d}x.$$

❻ Kdy řekneme, že je množinová funkce $\sigma-$aditivní?

❼ Z rovnice

$$x^2 - xyu^2 + zu^3 = 1$$

vypočítejte gradient funkce $u = u(x, y, z)$ v bodě $(1, 1, 1)$.

❽ Jakou plošnou míru má kruh o poloměru R centrovaný do počátku souřadné soustavy, je-li míra generována vytvořující funkcí $\varphi(x) = x^3$ (v obou dimenzích)?

❾ Definujte křivkový integrál druhého druhu.