Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMDS – varianta 01

úterý 16. června 2020, 9:00–11:00

1 (8 bodů)
Lighthillův Whithamův model ve své první fázi převádí základní dynamickou rovnici pro dopravní proudění na nelineární PDR

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \mu(x,\tau)\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mathtt{D}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}.$$

Ukažte, jak lze tuto rovnici převést na lineární PDE. Jakého typu (par/hyp/el) získaná rovnice je?

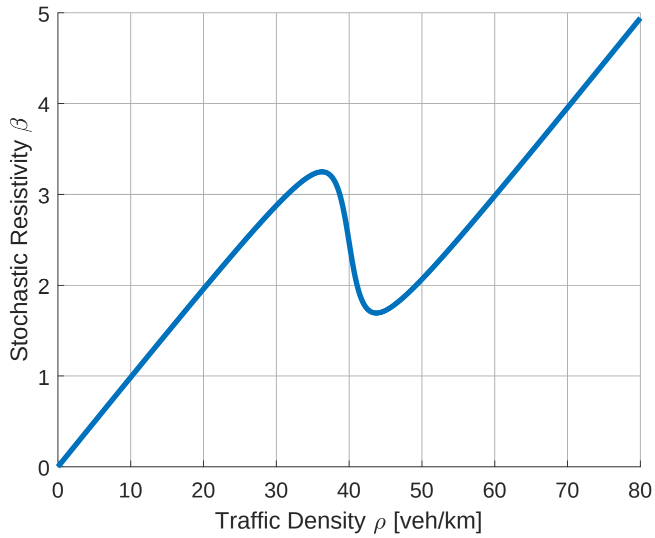
2 (10 bodů)
Při dopravním měření bylo mezi časy 13:05:00 a 13:08:00 (ve formátu hh:mm:ss) zachyceno na detektoru (magnetické indukční dvojsmyčce) přesně 120 vozidel. Vypočítejte, jakou směrodatnou odchylku měly hrubé prostorové rozestupy mezi za sebou jedoucími vozidly. Užijte k tomu následující předpoklady:

- Fundamentální diagram (závislost intenzity na hustotě) může být aproximován parabolou.
- Hrubé prostorové rozestupy se řídí Gamma rozdělením.
- Maximální intenzita v dané oblasti má hodnotu 3200 vozidel za hodinu a nastává při hustotě 40 vozidel na kilometr.
- Velikost stochastické rezistivity závisí na hustotě provozu podle obrázku na další straně zadání.
- V době měření se doprava nacházela v kondenzované fázi.

3 (9 bodů)
Odvoďte obecný vzorec pro rozptyl $k-$té multirozteče využívající znalost generátoru balančního částicového systému a jeho momentů $\mu_1(h) \triangleq \lambda$, $\mu_2(h) \triangleq \varkappa$. Vzorec poté aplikujte na výpočet rozptylu $k-$té multirozteče v Poissonově balančním částicovém systému.

4 (8 bodů)
V dvanáctibuňkovém modelu TASEP s parametry $\alpha = \beta = 1/3$ existují dvě konfigurace, při nichž jsou buňky obsazeny střídavě (vedle každé obsazené buňky jsou obě sousední buňky prázdné a vedle každé volné buňky jsou obě sousední buňky obsazené). Která z konfigurací nastává s větší pravděpodobností? A jaký je poměr těchto pravděpodobností? Při výpočtu užijte asymptotických hodnot partiční sumy z druhé strany zadání.

5 (15 bodů)
Odvoďte tvar hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost částic v termodynamickém dopravní plynu s logaritmickým potenciálem a neceločíselnou hodnotou statistické rezistivity. Užijte k tomu aproximaci vhodného integrálu v sedlovém bodě. Jaký typ distribuce je výsledkem? Co je limitou získané distribuce, zvětšuje-li se hodnota statistické rezistivity nade všechny meze?



Obrázek k příkladu č. 2

oblast parametrů	asymptotická hodnota Z_N
$\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	$\frac{\alpha\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(\beta-\alpha)} \left(\frac{1}{(2\,\alpha-1)^2} - \frac{1}{(2\,\beta-1)^2} \right) \frac{4^N}{N^{3/2}}$
$\frac{1}{2} < \alpha = \beta$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}\,(2\,\alpha-1)^3}\,\frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}$
$\alpha = \frac{1}{2} < \beta$	$\frac{2\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(2\,\beta-1)}\,\frac{4^N}{N^{1/2}}$
$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	4^N
$\alpha < \frac{1}{2}$ a $\alpha < \beta$	$\frac{\beta\,(1-2\,\alpha)}{(\beta-\alpha)\,(1-\alpha)}\,\frac{1}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = \beta < \frac{1}{2}$	$\frac{(1-2\,\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}\,\frac{N}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = 1 - \beta$	$\frac{1}{(\alpha\beta)^N}$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMDS – varianta 02

úterý 7. července 2020, 9:00–11:00

1 (7 bodů)

Nalezněte střední hodnotu a rozptyl Cowanovy M3 distribuce zadané vztahem

$$g(x) = (1-\varkappa)\delta(x-\Delta) + \varkappa\lambda\Theta(x-\Delta)\mathrm{e}^{-\lambda(x-\Delta)},$$

kde $\varkappa \in \langle 0,1\rangle$ a $\Delta, \lambda > 0$ jsou parametry a $\delta(x-c)$ je Diracova centrovaná $\delta-$funkce a $\Theta(x-c)$ je Heavisideova centrovaná funkce. Nápomocen vám může být Laplaceův obraz Cowanovy distribuce. Na kterém z těchto tří parametrů hodnota rozptylu nezávisí?

2 (7 bodů)

Uvažujeme model TASEP o čtrnácti buňkách s parametry $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta = \frac{3}{4}$. Jaká je pravděpodobnost konfigurace, v níž je posledních pět buněk obsazených a prvních deset buněk je obsazeno střídavě. Při výpočtu lze užít asymptotických hodnot partiční sumy z druhé strany zadání. Výsledek upravte do minimalistického tvaru.

3 (4 body)

Zapište, jak lze definovat tzv. super-poissonovský stav částicového systému pomocí hodnoty kompresibility. Vysvětlete, co je kompresibilita a jak ji lze určit z empirických dat.

4 (9 bodů)

Při leteckém měření dat byla pořízena fotografie stodvaceti vozidel, přičemž první vozidlo se nacházelo přesně na 22. kilometru dálnice, zatímco poslední vozidlo právě míjelo kilometrovník 24 km. Určete, jaká je průměrná světlost a jaká je nejpravděpodobnější světlost (v metrech) mezi vozidly. Užijte předpokladu, že škálované prostorové světlosti jsou rozděleny podle předpisu

$$g(x) = A\mathrm{e}^{-\beta/x}\mathrm{e}^{-\lambda x},$$

kde $\lambda \doteq \beta + 3/2$ a β je statistická rezistivita. Uvažujte auta délky 4,8 metru. K řešení použijte obrázek na další straně zadání.

5 (14 bodů)

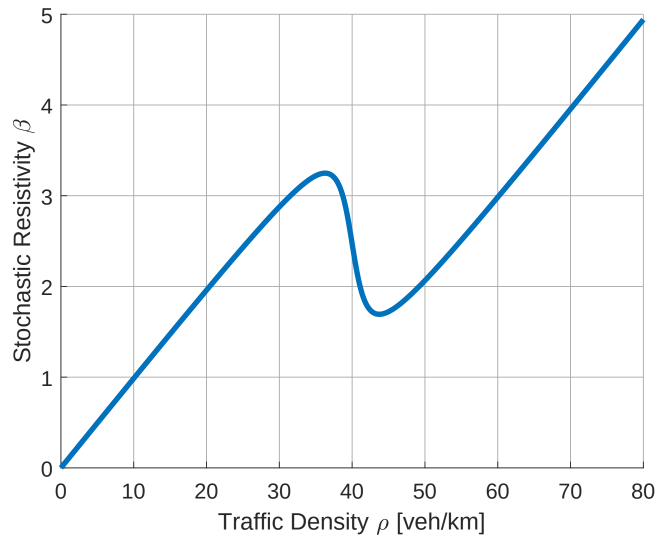
Odvoďte tvar hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost částic v termodynamickém dopravní plynu s logaritmickým potenciálem a neceločíselnou hodnotou statistické rezistivity. Užijte k tomu aproximaci vhodného integrálu v sedlovém bodě. Jaký typ distribuce je výsledkem? Co je limitou získané distribuce, zvětšuje-li se hodnota statistické rezistivity nade všechny meze?

6 (9 bodů)

Formulujte Greenbergův makroskopický dopravní model. Z tohoto modelu poté odvoďte závislost dopravní intenzity na hustotě provozu, studujte limitní chování intenzity pro hustoty klesající k nule a poté načrtněte průběh této závislosti. Užijte faktu, že pohybová rovnice pro jednodimenzionální kapalinové proudění je tvaru

$$a = -\frac{\texttt{konst}}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x}.$$

U použitých vztahů komentujte, jakou vlastnost v dopravní teorii představují.



Obrázek k příkladu č. 4

oblast parametrů	asymptotická hodnota Z_N
$\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	$\frac{\alpha\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(\beta-\alpha)}\left(\frac{1}{(2\,\alpha-1)^2}-\frac{1}{(2\,\beta-1)^2}\right)\frac{4^N}{N^{3/2}}$
$\frac{1}{2} < \alpha = \beta$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}\,(2\,\alpha-1)^3}\,\frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}$
$\alpha = \frac{1}{2} < \beta$	$\frac{2\,\beta}{\sqrt{\pi}\,(2\,\beta-1)}\,\frac{4^N}{N^{1/2}}$
$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	4^N
$\alpha < \frac{1}{2}$ a $\alpha < \beta$	$\frac{\beta\,(1-2\,\alpha)}{(\beta-\alpha)\,(1-\alpha)}\,\frac{1}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = \beta < \frac{1}{2}$	$\frac{(1-2\,\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}\,\frac{N}{\alpha^N\,(1-\alpha)^N}$
$\alpha = 1 - \beta$	$\frac{1}{(\alpha\beta)^N}$