

Příjmení a jméno

1

2

3

4

5

6

BONUS

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMD – varianta 01

úterý 16. května 2023, 14:00 — 15:50

Při zadání testu automaticky dostáváte 5 bodů!

1 (7 bodů)

Uvažujeme GIG distribuci tvaru

$$h(x) = A\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}.$$

Sestavte pro ni škálovací rovnici a upravte ji do tvaru, v němž vystupují Macdonaldovy funkce. Získanou škálovací rovnici vyřešte pro variantu $\alpha = -3/2$, kdy lze škálovací rovnici výrazně zjednodušit aplikací základních vztahů platných pro Macdonaldovy funkce (viz přehled na druhé straně zadání).

2 (8 bodů)

S jakou pravděpodobností nastane v TASEP-modelu s parametry $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ konfigurace

$$\tau = (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 0)?$$

Výsledek upravte do tvaru bez sum a dále ho zjednodušte a vhodně zaokrouhlete pomocí předpokladu, že řetězec buněk je dostatečně dlouhý.

3 (3 body)

Krátce vysvětlete, jak lze klasifikovat dopravní modely. Uveďte několik klasifikačních kritérií.

4 (12 bodů)

Představte kompletní řešení termodynamického dopravního modelu s logaritmickým potenciálem a obecnou (tj. neceločíselnou) hodnotou inverzní termodynamické teploty. Užijte aproximace v sedlovém bodě. Pro nalezenou distribuci světlostí diskutujte její vlastnosti (typ distribuční rodiny, plató, balancovaný chvost).

5 (8 bodů)

Ukažte, že hustotní distribuce dopravního proudu zavedená pomocí Borsalinova jádra konverguje (pro zmenšující se délku nosiče) k Diracovým hrábím.

6 (7 bodů)

Fundamentální závislost popisující dynamiku dopravního proudu na jisté (fiktivní) dálnici je popsána rovnicí

$$I = 150\rho e^{-\frac{\rho}{30}}.$$

Jaká nejmenší rychlost kinematického vlnění byla v systému zachycena? Výsledek vhodně zaokrouhlete. Odhadněte také, jaká je maximální dovolená rychlost na této dálnici.

$$x^a K_a(x) = 2^{a-1} \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-\frac{x^2}{4y}} e^{-y} dy, \quad (x > 0)$$

$$K_a(x) = K_{-a}(x)$$

$$K_{a-1}(x) - K_{a+1}(x) = -\frac{2a}{x} K_a(x),$$

$$K'_a(x) = -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x} K_a(x),$$

$$K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x) = -2K'_a(x),$$

$$K'_a(x) = -K_{a+1}(x) + \frac{a}{x} K_a(x),$$

oblast parametrů	asymptotická hodnota Z_N
$\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	$\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\pi}(\beta-\alpha)} \left(\frac{1}{(2\alpha-1)^2} - \frac{1}{(2\beta-1)^2} \right) \frac{4^N}{N^{3/2}}$
$\frac{1}{2} < \alpha = \beta$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}(2\alpha-1)^3} \frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}$
$\alpha = \frac{1}{2} < \beta$	$\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}(2\beta-1)} \frac{4^N}{N^{1/2}}$
$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	4^N
$\alpha < \frac{1}{2}$ a $\alpha < \beta$	$\frac{\beta(1-2\alpha)}{(\beta-\alpha)(1-\alpha)} \frac{1}{\alpha^N (1-\alpha)^N}$
$\alpha = \beta < \frac{1}{2}$	$\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} \frac{N}{\alpha^N (1-\alpha)^N}$
$\alpha = 1 - \beta$	$\frac{1}{(\alpha\beta)^N}$

Borsalinovo jádro je funkce definovaná předpisem

$$B(x|\sigma) := \frac{1}{\sigma} \omega\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

kde

$$\omega(x) = \frac{1}{Z_B} \Theta(1 - |x|) e^{\frac{1}{x^2-1}},$$

a $Z_B \approx 0.4439940$ je konstanta zaručující normalizaci.

Příjmení a jméno

1

2

3

4

5

6

BONUS

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMD – varianta 02

čtvrtek 8. června 2023, 9:15 — 11:15

Při zadání testu automaticky dostáváte 5 bodů!

1 (7 bodů)

Uvažujme model TASEP o N buňkách splňující podmínku komutativity. Pro jaké nastavení parametrů α , β bude pravděpodobnost, že druhá a třetí buňka bude prázdná a pátá, šestá, sedmá, osmá a devátá buňka bude obsazená, maximální?

2 (8 bodů)

V dopravním systému, jehož fundamentální závislost je řízena vztahem

$$I = 108\rho \left(1 - \frac{\rho}{120}\right)^3$$

byl analyzován datový vzorek. Jeho rozdělení rychlostí bylo odhadnuto hustotou pravděpodobnosti

$$q(v) = \Theta(v) \frac{1}{31!} v^{31} e^{-v}.$$

Jaká je rychlost kinematického vlnění analyzovaného vzorku?

3 (4 body)

Vysvětlete, co rozumíme pojmem *kompresibilita* dopravního systému a diskutujte, jak vypadá kompresibilita systémů s nízkou hustotou provozu.

4 (10 bodů)

Na základě znalosti distribuce prostorových světlostí a užitím faktu, že rychlosti vozidel jsou rozděleny normálně odvoďte statistické rozdělení časových odstupů mezi sousedními vozidly. Výsledek upravte do tvaru řady a určete v něm hlavní člen. Dále dokažte, že zbylé členy lze v rozvoji chápat jako členy poruchové, tj. členy, jež se při normalizaci neprojeví. Náповěda:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \int_{\mathbf{R}} (x-a)^m e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = \frac{m! b^m}{m!!} \quad (m \text{ sudé}).$$

5 (7 bodů)

Aplikací tzv. vyhlazeného počtu částic odvoďte (ze známých poznatků z matematické analýzy) rovnici kontinuity pro dopravní proudění. Na základě jejího tvaru poté ukažte (za pomoci odvození), že praktickou interpretací rovnice kontinuity je zákon zachování počtu vozidel.

6 (9 bodů)

Burgersovu nelineární parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \mu(x, \tau) \frac{\partial \mu}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}$$

upravte na lineární verzi.

Příjmení a jméno

1

2

3

4

5

6

BONUS

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MMD – varianta 03

čtvrtek 14. září 2023, 9:15 — 11:15

Při zadání testu automaticky dostáváte 5 bodů!

1 (6 bodů)

Statistická rigidita dopravního systému je funkce

$$\Delta(L) = \frac{1 + 4L}{8} - \frac{8L + 1}{8} e^{-4L}.$$

Jakou kompresibilitu má tento systém? Vysvětlete, jak jste k výsledku došli. Dále určete (v kompaktní formě) Laplaceův obraz zadané statistické rigidity.

2 (3 body)

Krátke (postačí jen slovně) vysvětlete podstatu 3s-unifikační procedury zpracování dopravních dat.

3 (8 bodů)

Dopravní (obecně částicový) systém má rozteče popsané sřídavě hustotami

$$\begin{cases} s(x) & \text{pro sudé rozteče (včetně nulté);} \\ \ell(x) & \text{pro liché rozteče.} \end{cases}$$

Určete, jak souvisí Laplaceův obraz $R(s)$ shlukové funkce systému s Laplaceovými obrazy $S(s)$, $L(s)$ obou hustot. Získaný výsledek potom upravte užitím předpokladu, že $s(x) = \ell(x)$.

4 (12 bodů)

Představte kompletní řešení termodynamického dopravního modelu s logaritickým potenciálem a obecnou (tj. neceločíselnou) hodnotou inverzní termodynamické teploty. Užijte aproximace v sedlovém bodě. Pro nalezenou distribuci světlostí diskutujte její vlastnosti (typ distribuční rodiny, plató, balancovaný chvost).

5 (8 bodů)

Uvažujme model TASEP o N buňkách splňující podmínku komutativity. Pro jaké nastavení parametrů α , β bude pravděpodobnost, že druhá a třetí buňka bude prázdná a pátá, šestá, sedmá, osmá a devátá buňka bude obsazená, maximální?

6 (8 bodů)

V dopravním systému, jehož fundamentální závislost je řízena vztahem

$$I = 108\rho \left(1 - \frac{\rho}{120}\right)^3$$

byl analyzován datový vzorek. Jeho rozdělení rychlostí bylo odhadnuto hustotou pravděpodobnosti

$$q(v) = \Theta(v) \frac{1}{31!} v^{31} e^{-v}.$$

Jaká je rychlost kinematického vlnění analyzovaného vzorku?

$$x^a K_a(x) = 2^{a-1} \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-\frac{x^2}{4y}} e^{-y} dy, \quad (x > 0)$$

$$K_a(x) = K_{-a}(x)$$

$$K_{a-1}(x) - K_{a+1}(x) = -\frac{2a}{x} K_a(x),$$

$$K'_a(x) = -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x} K_a(x),$$

$$K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x) = -2K'_a(x),$$

$$K'_a(x) = -K_{a+1}(x) + \frac{a}{x} K_a(x),$$

oblast parametrů	asymptotická hodnota Z_N
$\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	$\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\pi}(\beta-\alpha)} \left(\frac{1}{(2\alpha-1)^2} - \frac{1}{(2\beta-1)^2} \right) \frac{4^N}{N^{3/2}}$
$\frac{1}{2} < \alpha = \beta$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}(2\alpha-1)^3} \frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}$
$\alpha = \frac{1}{2} < \beta$	$\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}(2\beta-1)} \frac{4^N}{N^{1/2}}$
$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	4^N
$\alpha < \frac{1}{2}$ a $\alpha < \beta$	$\frac{\beta(1-2\alpha)}{(\beta-\alpha)(1-\alpha)} \frac{1}{\alpha^N(1-\alpha)^N}$
$\alpha = \beta < \frac{1}{2}$	$\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} \frac{N}{\alpha^N(1-\alpha)^N}$
$\alpha = 1 - \beta$	$\frac{1}{(\alpha\beta)^N}$

Borsalinovo jádro je funkce definovaná předpisem

$$B(x|\sigma) := \frac{1}{\sigma} \omega\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

kde

$$\omega(x) = \frac{1}{Z_B} \Theta(1 - |x|) e^{\frac{1}{x^2-1}},$$

a $Z_B \approx 0.4439940$ je konstanta zaručující normalizaci.