

# Super-poissonovské stavy v balančních částicových systémech

Vít Pánek<sup>1</sup> and Milan Krbálek<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Katedra matematiky, FJFI, ČVUT Praha

Email: panekvit@fjfi.cvut.cz

**Abstract.** Tento článek vysvětluje příčiny anomálních jevů zjištěných při analýze dopravních proudů na vícepruhových silnicích. Ačkoli je toto vysvětlení založeno především na důkladné matematické analýze zkoumaného problému, v konečném důsledku poskytuje odpovědi na otázky týkající se specifík dynamiky interakcí, které působí mezi jednotlivými vozidly vícepruhového dopravního proudu. Článek seznamuje čtenáře s teorií rovnovážných částicových systémů a matematickou cestou vedoucí ke klasifikaci jednorozměrných částicových systémů podle statistických fluktuací. Tato klasifikace pak umožňuje automatickou detekci statisticky anomálních stavů také ve všech příbuzných systémech.

**Key words:** Particle Systems; Super-Poisson States; Statistical Rigidity; Statistical Compressibility; Balanced Functions; Renewal Theory;.

## 1 Úvod

Vznik tohoto článku (a celé teorie, která představuje matematické jádro problematiky) byl motivován otevřeným problémem v teorii proudění automobilové dopravy. Zatímco mikrostruktura dopravních proudů na jednopruhových komunikacích byla na počátku tohoto tisíciletí poměrně věrohodně popsána a zdůvodněna, u dat naměřených na dvoupruhových dálnicích byly zjištěny zajímavé a překvapivé anomálie. Původ těchto anomálií čekal na vysvětlení poměrně dlouho. Základním stavebním kamenem příslušného řešení je sjednocení postupu zpracování empirických dopravních dat a převedení problému do matematického formalismu. To umožnilo transformovat dosud jen kvalitativně popsané anomálie na rigorózně definované anomální stavy (tzv. super-Poissonovy stavy), které lze nalézt pouze v některých velice specifických systémech vzájemně interagujících částic.

Hlavními pilíři celého řešení jsou:

1. Rigorózní důkaz, že ve všech jednorozměrných systémech částic, kde interakce působí pouze na malém měřítku (tj. pro interakce mezi několika nejbližšími sousedy), musí být hustota pravděpodobnosti popisující vzdálenost (rozestup nebo světlost) mezi

následujícími částicemi popsána funkcí patřící do třídy tzv. balancovaných hustot (viz [1]).

2. Konstatování skutečnosti, že anomální stavy v empirických dopravních datech lze nejspíše odhalit pomocí statistické analýzy využívající tzv. 3s-unifikační proceduru [2].
3. Zjištění, že podobná problematika byla zkoumána v rámci teorie náhodných matic [3], kde byl pro podobné účely s výhodou použit aparát statistické rigidity.
4. Analytické odvození rozdělení světlostí pro rovnovážné stavy termodynamického částicového plynu definovaného obecným interakčním potenciálem  $\varphi(x)$  a obecnou hodnotou statistické rezistivity  $\beta \propto 1/T$ , kde  $T$  je termodynamická teplota plynu (viz [4]).
5. Rigorózní důkaz [2], že v jednorozměrných systémech částic s nulovou nebo odpudivou silou mezi sousedy je statistická kompresibilita vždy menší než jedna.

Tento článek vysvětluje pozadí vzniku tzv. superpoissonových stavů v částicových systémech podobných dopravním proudům. Nejprve připomeneme známý fakt, že v Poissonově systému neinteragujících agentů je statistická kompresibilita, která popisuje míru statistických fluktuací v systému, rovna jedné. Dále pomocí teoretického nástroje balančních částicových systémů ([5, 6, 7]) vysvětlíme, co je hlavní příčinou překročení mezní hodnoty statistických fluktuací v určitých typech systémů (nebo v určitých stavech jednoho systému). Tímto způsobem de facto řešíme výše uvedený otevřený problém z oblasti Vehicular Headway Modelling (modelování rozestupů vozidel v dopravním proudu).

## 2 Balanční částicové systémy

### 2.1 Koncept balančních částicových systémů

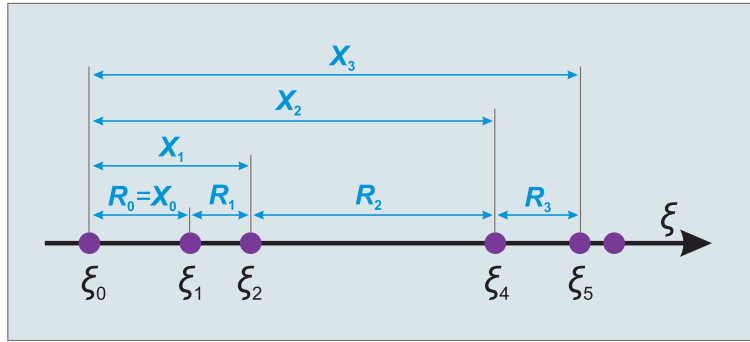
Uvažujeme nekonečný jednodimenzionální částicový systém s pevným počátkem. V počátku tohoto systému leží částice, kterou nazýváme referenční. Na obrázku 1 polohu referenční částice značíme  $\xi_0$ . Polohy dalších částic pak značíme  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$ . Mezi tři základní náhodné veličiny, které každý takový částicový systém přirozeně popisují, řadíme:

1. *Rozteče*, tj. vzdálenosti sousedních částic, které chápeme jako absolutně spojitě a nezáporné náhodné veličiny. Ty přirozeně vytvářejí tzv. posloupnost roztečí  $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{+\infty}$ .
2. *Multirozteče*, chápané jako vzdálenosti vybrané částice od částice referenční (viz obrázek). Multirozteč  $\mathcal{X}_k$  představuje vzdálenost  $k + 1$  částice od referenční částice, což značí, že  $k$ -tou multirozteč lze zavést vztahem

$$\mathcal{X}_k = \sum_{i=0}^k \mathcal{R}_i.$$

3. *Intervalová frekvence*  $N_L$ , která mapuje počet částic vyskytujících se v intervalu  $(0, L)$  za referenční částicí.  $N_L$  je tudíž diskrétní náhodnou veličinou, parametrizovanou hodnotou  $L$ . Standardně bývá popisována pravděpodobností výskytu  $k$  částic v intervalu  $(0, L)$ . Příslušným pravděpodobnostním dotazem je tedy výraz

$$\mathcal{P}[N_L = k] = ?$$



Obrázek 1: Základní popisné veličiny částicového systému.

*Balančním částicovým systémem* rozumíme posloupnost multiroztecí  $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{+\infty}$  zavedených předpisem  $\mathcal{X}_k = \sum_{n=0}^k \mathcal{R}_n$  splňující tyto axiomy:

1. *Axiom stejné rozdělenosti*: Posloupnost  $(\mathcal{R}_n)_{n=0}^{+\infty}$  je posloupností nezáporných, absolutně spojitých a stejně rozdělených náhodných veličin.
2. *Axiom balancovaného generátoru*: Hustota pravděpodobnosti  $h(x)$  náhodných veličin  $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$  (tzv. *generátor balancovního částicového systému*) patří do třídy  $\mathcal{B}$  balancovaných hustot, tj.  $h(x) \in \mathcal{B}$  (definice viz níže).
3. *Axiom konvoluční kompatibility*: Posloupnost  $(\mathcal{R}_n)_{n=0}^{+\infty}$  je posloupností konvolučně kompatibilních náhodných veličin, tj. pro libovolné dvě různé náhodné veličiny  $\mathcal{R}_i$  a  $\mathcal{R}_k$  ( $i \neq k$ ) platí, že  $\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_k \sim (h \star h)(x)$ .

Axiom konvoluční kompatibility může být pochopitelně nahrazen přísnějším požadavkem, aby posloupnost  $(\mathcal{R}_n)_{n=0}^{+\infty}$  byla posloupností nezávislých náhodných veličin. Za tohoto předpokladu lze snadno dokázat, že

$$\mathcal{X}_k \sim \star_{i=0}^k h(x).$$

## 2.2 Třída balancovaných funkcí

Třída balancovaných funkcí  $\mathcal{B}$  je prostor po částech spojitých funkcí  $f(x)$  s definičním oborem  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ , oborem hodnot  $\text{Ran}(f) \subset [0, +\infty)$  a nosičem  $\text{supp}(f) \subset [0, +\infty)$ , pro které existuje kladné číslo  $\varkappa$  takové, že

$$(\forall \alpha > \varkappa) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{\alpha x} = +\infty \quad \wedge \quad (\forall \alpha < \varkappa) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{\alpha x} = 0 \quad (\text{balanční axiom}).$$

Číslo  $\varkappa$  se nazývá *balanční index* a značí se  $\text{inb}(f)$ . Ve skutečnosti příslušnost rozdělení rozestupů ke třídě  $\mathcal{B}$  je nutná pro každý jednodimenzionální částicový systém, kde jsou interakce omezeny pouze na několik sousedících částic [8], což velmi dobře odpovídá reálným dopravním situacím.

### 2.3 Stochastický mnohočasticový plyn – fyzikální realizace balancovaného systému částic

Fyzikální realizace výše popsaného balančního systému částic je reprezentována souborem mnoha stejných částic rozmístěných po křivce (typicky polopřímky, přímky nebo kružnice), které jsou vystaveny stochastickému šumu různé intenzity. Úroveň šumu v tomto systému je řízena takzvaným koeficientem *stochastického rezistivity*  $\beta$ . Nulová hodnota  $\beta$  znamená absolutní hladinu šumu v souboru, který tedy odpovídá Poissonově systému, kde čistě náhodné umístění částic generuje exponenciálně rozdělené mezičasticové rozestupy, jejichž rozdělení v ustáleném stavu je následující

$$g(x) = \Theta(x)\lambda e^{-\lambda x}.$$

Naopak, pokud rezistivita  $\beta$  roste nad všechny meze, systém ve skutečnosti odpovídá deterministickému systému, jehož vnitřní dynamika není zatížena žádnými stochastickými fluktuacemi. Za této podmínky platí  $g(x) = \delta(x - \nu)$ , což znamená, že částice jsou rozmístěny ekvidistantně s lokacemi  $\xi_0, \xi_0 + \nu, \xi_0 + 2\nu, \xi_0 + 3\nu, \dots$ . Uvedené  $\delta(x)$  označuje Diracovu delta funkci.

Uspořádání částic v obou hraničních variantách nijak nezávisí na interakcích mezi jednotlivými částicemi. Situace se však dramaticky změní pro hodnoty  $0 < \beta < +\infty$ . Pak bude stacionární stav systému silně závislý nejen na hodnotě rezistivity, ale zejména na interakčních silách, které určují vzájemné interakce mezi sousedními částicemi v systému. V homogenní variantě systému, kdy se všechny sousední částice odpuzují/přitahují prostřednictvím dynamického popisu (síla  $F(x)$  a interakční potenciál  $\varphi(x)$ ), kde  $F(x) = -\varphi'(x)$ , je přidružený ustálený stav systému popsán (viz obecné odvození v [4]) následujícím rozdělením vzdáleností mezi částicemi:

$$g(x) = A\Theta(x)e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x}, \quad (1)$$

kde konstanty  $A = A(\beta)$  a  $\lambda = \lambda(\beta)$  zajišťují správnou normalizaci a škálování.

Navíc za podmínek

$$\varphi'(x) \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0. \quad (2)$$

aplikované na hustotu pravděpodobnosti (1) platí následující implikace

$$\mu_1 = 1 \quad \implies \quad \lambda \geq 1 \quad \wedge \quad \mu_2 \leq 2, \quad (3)$$

kde  $\mu_k = \int_{\mathbb{R}} x^k h(x) dx$  je  $k$ -tý moment hustoty  $h$ . Navíc toto nastává právě pro Poissonův systém mezní hodnoty  $\lambda = 1$ ,  $\mu_2 = 2$ , což je buď systém s absolutně neinteragujícími částicemi, tj.  $\varphi(x) = 0$ , nebo stochasticky neodolný systém, kde  $\beta = 0$ . Tyto varianty

jsou popsány exponenciálním rozdělení odstupů  $h(x) = \Theta(x)e^{-x}$ , pro kterou je tedy rozptyl

$$\text{VAR}(\mathcal{X}) = \mu_2 - \mu_1^2 = 1$$

#### Poznámka

Tak, jak bývá zvykem, budeme i my bez újmy na obecnosti předpokládat, že balanční částicový systém je škálován, a že tedy střední hodnota roztečí je jednotková,

tj.  $\int_{\mathbb{R}} xh(x) dx = 1$ .

### 3 Statistická rigidita

Jednou z fundamentálních charakteristik balančního částicového systému je tzv. statistická rigidita  $\Delta(L)$ , mapující variabilitu intervalové frekvence  $N_L$ . Počátky jejího zavedení pro účely studia částicových systému lze nalézt už v teorii náhodných matic [3], kde kvantifikuje variabilitu energetických hladin ve spektrech těžkých jader. Bývá definována vztahem

$$\Delta(L) = \text{E}(N_L - L)^2. \quad (4)$$

Graf statistické rigidity má pro klasické systémy poměrně jednoduchý průběh. Velmi blízko za počátkem souřadné soustavy se totiž upíná k výrazné lineární asymptotě. Právě touto přímkou

$$\Delta(L) \approx \chi L + \delta + o(1/L^2) \quad (L \rightarrow +\infty) \quad (5)$$

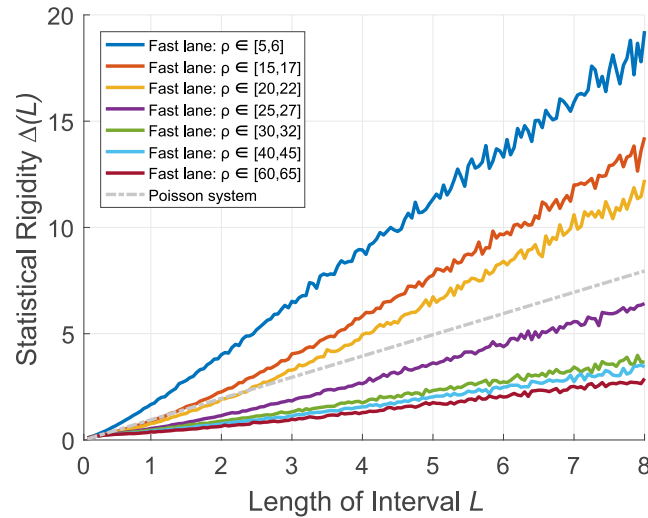
lze statistickou rigiditu velice dobře aproximovat. Konstanty  $\chi$ ,  $\delta$  této lineární asymptoty nazýváme po řadě kompresibilitou, resp. deflekcí. Známým poznatkem teorie částicových systémů je skutečnost, že pro vyjádření kompresibility a deflektce daného BČS postačí pouze znalost generátoru balančního částicového systému. Pro kompresibilitu a deflektci totiž platí následující vztahy:

$$\chi = \mu_2(h) - 1, \quad \delta = \frac{1}{6}(9\mu_2^2 - 9\mu_2 - 4\mu_3 + 6). \quad (6)$$

Detailní odvození těchto dvou vztahů můžete najít v práci [9].

### 4 Klasifikace systémů podle míry fluktuace intervalové frekvence

Balanční částicové systémy lze přirozeně klasifikovat podle velikosti kompresibility  $\chi$ . Na obrázku 3 vidíme čtyři barevně odlišené oblasti, a to oblast *deterministických stavů*. (červená), *sub-Poissonovy stavy* (modrá), *Poissonovských stavů* (zelená) a *super-Poissonovských stavů*. (tyrkysová). Poissonovy stavy ( $\chi = 1$ ) a deterministické stavy ( $\chi = 0$ ) představují mezní stavy pro všechny částicové systémy a jsou podrobněji popsány níže. Modrá oblast sub-Poissonových stavů zahrnuje naprostou většinu reálných fyzikálních, biologických,



Obrázek 2: Statistická rigidita dálničních dat v rychlém pruhu. Údaje o jednotlivých vozidlech byly sbírány po dobu 90 dnů na dálničním okruhu R1 (nedaleko Prahy, Česká republika) pomocí technologie indukční dvousmyčkové detekce.

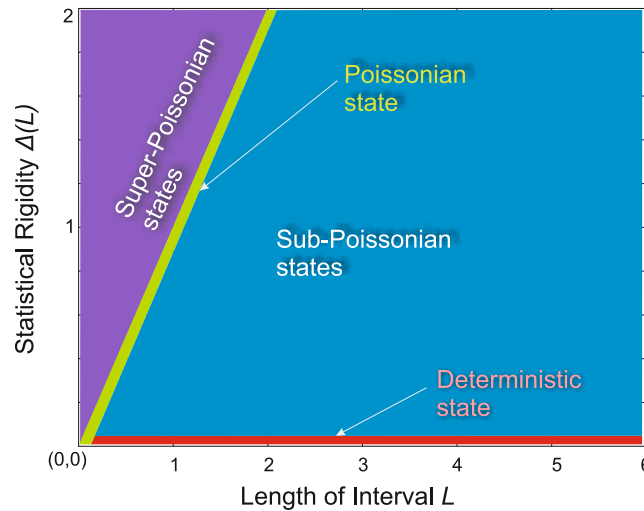
ekonomických nebo sociálně-dynamických systémů, protože ve fyzikální teorii termodynamických systémů tato oblast odpovídá systémům s čistě odpuzivými potenciály  $\varphi(x)$ , kde kompresibilita  $\chi$  leží v intervalu  $(0, 1)$ .

Nejzajímavějším typem systémů částic (a také nejvzácnějším a nejméně prozkoumaným) je super-Poissonova varianta vyváženého systému částic, pro kterou příslušná kompresibilita přesahuje jednotkovou hodnotu. V takových systémech je míra fluktuací – jak je zřejmé – větší než v Poissonových systémech, které jsou obecně považovány za systémy s nejvyšší mírou fluktuací, protože fluktuace nejsou nijak redukovány.

Tyto úvahy nás nutí klást si následující otázky: Existují vůbec super-Poissonovy systémy? Mohou se superpoissonovské stavy vyskytovat v reálných (fyzikálních, biologických, ekonomických nebo sociálně-dynamických) systémech? Odpovědi budou uvedeny v následujícím textu.

## 4.1 Diracův BČS

V Diracově balančním částicovém systému (nebo-li v deterministickém systému) je směrnice statistické rigidity, tj. kompresibilita, nulová. Je to stav systému, kdy jsou jednotlivé částice rozloženy ekvidistantně a stochastická rezistivita  $\beta$  roste nad všechny meze. Takový stav je však pouze idealistický. V reálných dopravních proudech, kde jsou vozidla řízena reálnými (tj. zdaleka ne dokonalými) řidiči, nelze Diracova uspořádání vozidel nikdy dosáhnout.



Obrázek 3: Klasifikace balančních částicových systémů.

## 4.2 Poissonův BČS

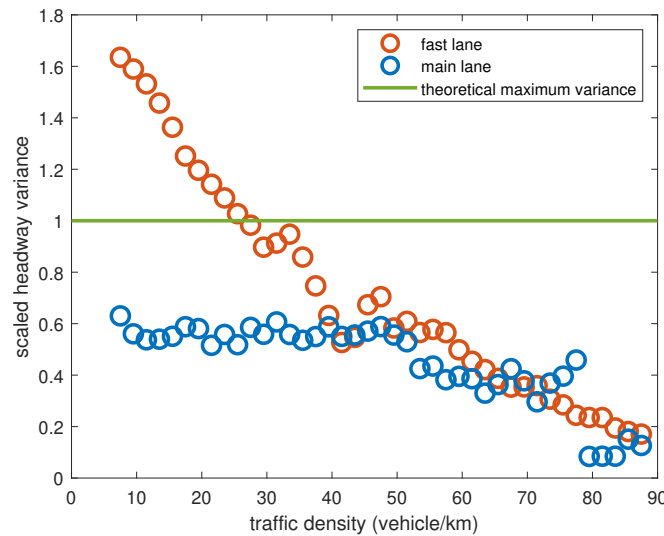
Pravým opakem Diracova BČS je Poissonův BČS. V takovém systému je stochastická odolnost nulová a rozptyl rozestupů je roven jedné, protože částice na sebe vzájemně reagují, a jsou tedy zcela nezávislé. To umožňuje absolutní volnost v rozhodování jednotlivých částic a rozestupy mezi nimi jsou proto velmi rozptýlené. V empirických dopravních souborech lze tuto situaci nalézt při velmi nízké hustotě provozu (do 5 vozidel na kilometr dálnice). Protože řidiči v takto řídkém provozu nejsou téměř vůbec ovlivňováni sousedními řidiči, mají maximální volnost v rozhodování, a ta připouští nejvyšší úroveň stochastického šumu v systému.

## 5 Super-Poissonovské stavy BČS

Jak již bylo vysvětleno, balancovaný systém částic má super-Poissonovo uspořádání, pokud je přidružená kompresibilita větší než jedna. To znamená, že v takovém systému jsou jednotlivé realizace vybrané náhodné veličiny ještě více rozptýleny kolem své střední hodnoty než v Poissonově systému, kde o sobě jednotlivé částice vůbec nevědí. Původně se měření spadající do superpoissonovské oblasti považovala za chyby měření. Postupem času se však ukázalo, že měření nejsou chybná a že mezi prvky působí nejen odpudivé, ale i přitažlivé síly. Jak bylo uvedeno výše, pokud v systému částic působí striktně odpudivé síly, pak super-Poissonův stav nemůže nastat. Je-li v systému částic zjištěna kompresibilita větší než jedna, pak lze logicky předpokládat, že mezi prvky v tomto systému působí také přitažlivé síly. Tato přitažlivá síla má podobně jako běžnější odpudivá síla psychosociální původ. V automobilové dopravě se superpoissonovské podmínky vyskytují například při nižší hustotě provozu v rychlém pruhu dálnice. Řidiči nacházející se v rychlejším dálničním pruhu mají tendenci dohnat vozidlo jedoucí před nimi a tato tendence je příčinou přitažlivého silového impulsu. Dalším důvodem pro zvýšení kompre-

sibility nad teoretickou mez je skutečnost, že při nižších hustotách dopravního proudu je možné předjíždění a střídání pruhů. To způsobuje super-Poissonovské chování dopravního proudu (viz [2]).

Na obrázku 4 můžeme vidět výsledek analýzy dopravních dat z holandské dálnice o dvou jízdnicích pruzích. Modře značené jsou naměřené rozteče z hlavního pruhu, kde se po celou dobu kompresibilita pohybuje uvnitř intervalu (0,1) a spadá tak do subpoissonovských stavů. Červeně jsou značená data z rychlejšího dálničního pruhu a jak lze vidět, předpokládaná horní hranice hodnoty rozptylu roztečí (zeleně) je překonána v rychlém dopravním pruhu při nižších hustotách provozu, konkrétně při hustotách 5-20 vozidel na kilometr. Při takovéto hustotě však není dopravní tok tak řídký, aby jednotlivá vozidla neinteragovala a působí repulzivní síly. Co však způsobuje tuto odchylku je působení již zmíněné atraktivní síly. Existence atraktivních sil v těchto situacích dopravního proudu je způsobena přítomností agresivnějších řidičů v rychlém dopravním pruhu na dálnici. Tito řidiči dojíždí vozidlo před sebou a malými rozestupy, které jsou při dané rychlosti a hustotě neobvyklé, se snaží vytlačit vozidlo před sebou z rychlejšího pruhu, aby mohli dále pokračovat v rychlé jízdě.



Obrázek 4: Data z holandské dálnice A9.

Hlavní příčinou uvedeného stavu je tedy přitažlivá síla, která se musí promítnout i v potenciálu. Aby systém byl stále bezkolizní, musí být zahrnuta i síla odpudivá, a tudíž potenciál působící v těchto stavech je tzv. *kombinovaný potenciál*  $\varphi(r) = \kappa \ln(r) + \frac{1}{r}$ , kde  $r$  je vzdálenost mezi sousedními vozidly a  $\kappa$  je *silový koeficient*, vyjadřující poměr mezi přitažlivou složkou  $\ln(r)$  a odpudivou složkou  $\frac{1}{r}$ . Zderivováním potenciálu získáme sílu

$$F(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2}.$$

Můžeme vidět, že tato síla zabrání srážce, tedy

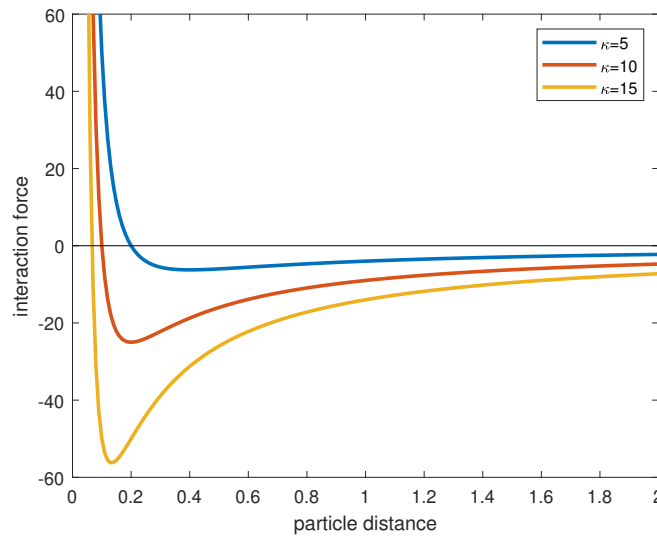
$$\lim_{r \rightarrow 0^+} F(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( -\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{-\kappa r + 1}{r^2} = +\infty,$$



a zároveň pro velké vzdálenosti interakce rychle vymizí, což je patrné z toho, že

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} -\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2} = 0.$$

Přitažlivá složka síly je reprezentována výrazem  $-\kappa/r$ , zatímco odpuzivá složka síly je reprezentována výrazem  $1/r^2$ . Na obrázku 5 je znázorněno několik příkladů kombinovaných sil. V blízkosti počátku je vidět silné odpuzování a poté pod horizontální osou detekujeme oblast, kde repulze převažuje nad atrakcí.



Obrázek 5: Průběh síly při různé volbě  $\kappa$ .

## 6 Závěr

Tento článek shrnuje nejnovější poznatky o takzvaných superpoissonových stavech objevených v problematice statistického odhadování odstupů vozidel. Článek také poskytuje čtenáři přehled o balancovaných částicových systémech a jejich klasifikaci na základě statistické rigidity, resp. kompresibility.

Jak jsme mohli vidět, na dálnici existuje výrazný rozdíl v kompresibilitě mezi rychlým a hlavním pruhem až do určité hustoty provozu (přibližně 40 vozidel na kilometr). Při vyšší hustotě je chování řidičů v hlavním a rychlém pruhu nerozlišitelné. Při nižších hustotách provozu vykazuje rychlý pruh výrazně vyšší kompresibilitu než pruh hlavní, přičemž se kompresibilita zvyšuje nad teoretickou jednotkovou hodnotu platnou pro Poissonův systém. V BČS, kde působí čistě odpuzivé síly, skutečně nelze tuto teoretickou mez překročit. Nadlimitní kompresibilita lze v systému zjistit pouze v případě, že v systému existuje přitažlivá složka interakční síly. Vysvětlením existence přitažlivé složky v dopravě je přítomnost sportovně založených řidičů v rychlém pruhu, možnost předjíždění a střídání jízdních pruhů. To je v souladu se skutečností, že superpoissonovské stavy jsou detekovány v provozu ve více jízdních pruzích a nevyskytují se ve vyšších hustotách provozu, kde není dostatečný prostor pro působení těchto faktorů.

## Poděkování

Výzkum prezentovaný v tomto článku byl podpořen grantem CK01000152, který poskytla Technologická agentura České republiky (TAČR) a grantem SGS21/165/OHK4/3T/14 poskytnutým Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČR (MŠMT ČR).

## Reference

- [1] Krbálek, M., Hrabák, P., Bukáček, M., 2018. *Physica A* 490, 38.
- [2] Krbálek, M., Šeba, F., Krbálková, M., 2022. *Physica A* 585, 126418.
- [3] Mehta, M.L., 2004. *Random matrices (Third Edition)*. New York: Academic Press.
- [4] Krbálek, M., 2007. *J. Phys. A: Math. Theor.* 40, 5813.
- [5] Cox, D. R., 1962. *Renewal Theory*, Methuen & Co., London, New York.
- [6] Cox, D. R., Lewis, P. A. W., 1978. *The statistical Analysis of Series of Events*, Chapman & Hall.
- [7] Hannan, E. J., 1961. *Time series analysis*, Methuen & Co., London, New York.
- [8] Krbálek, M., Šleis, J., 2015. *J. Phys. A: Math. Theor.* 48, 015101.
- [9] Pánek, V., 2020. *Statistical compressibility for systems with middle-ranged potentials*, Research Project, FNSPE CTU in Prague, supervisor doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.